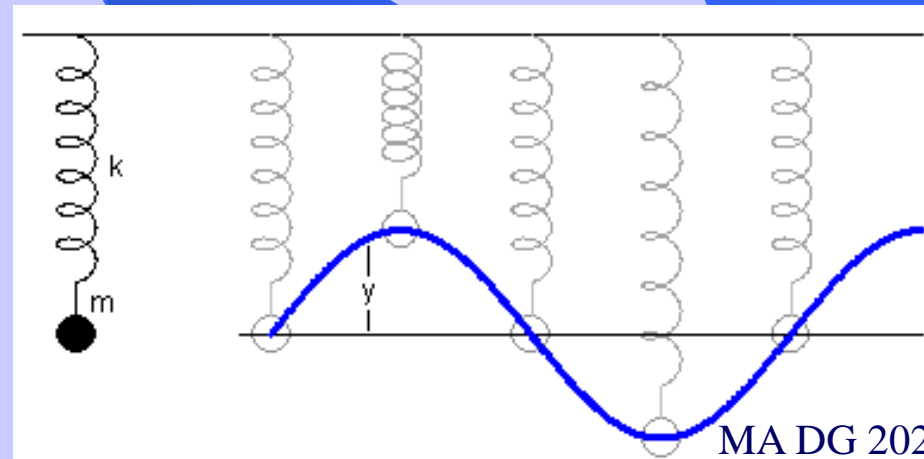
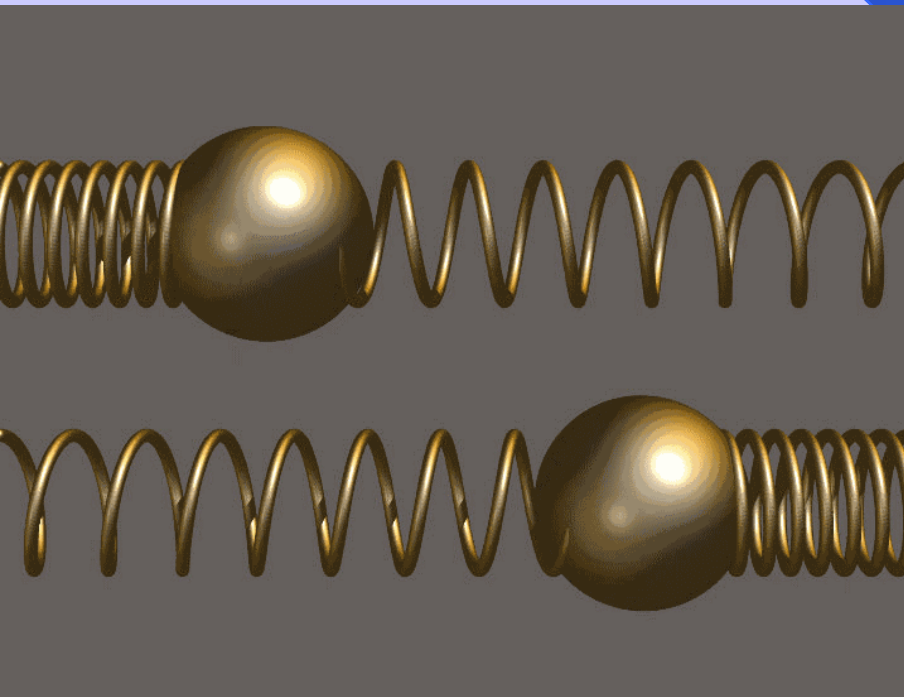
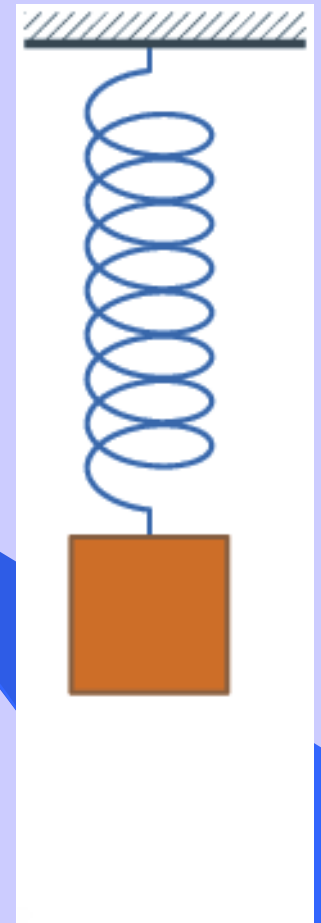


# Rezgőmozgás



## mozgásfajták

*haladó mozgás*

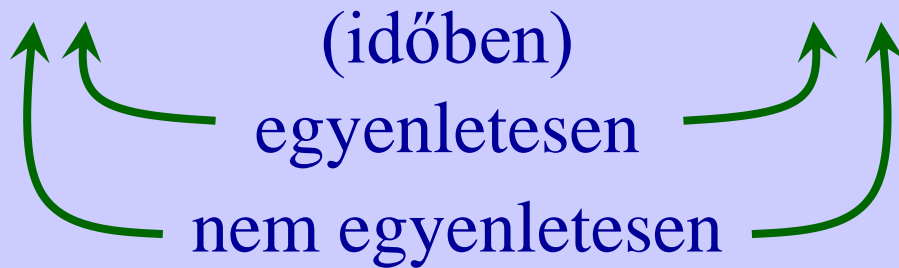
- egyenletes
- változó

*körmozgás,  
forgó mozgás*

- egyenletes
- változó

***rezgőmozgás,  
hullámmozgás***

- harmonikus
- anharmonikus

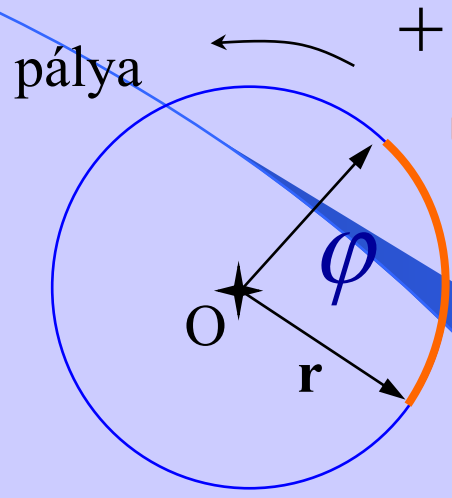
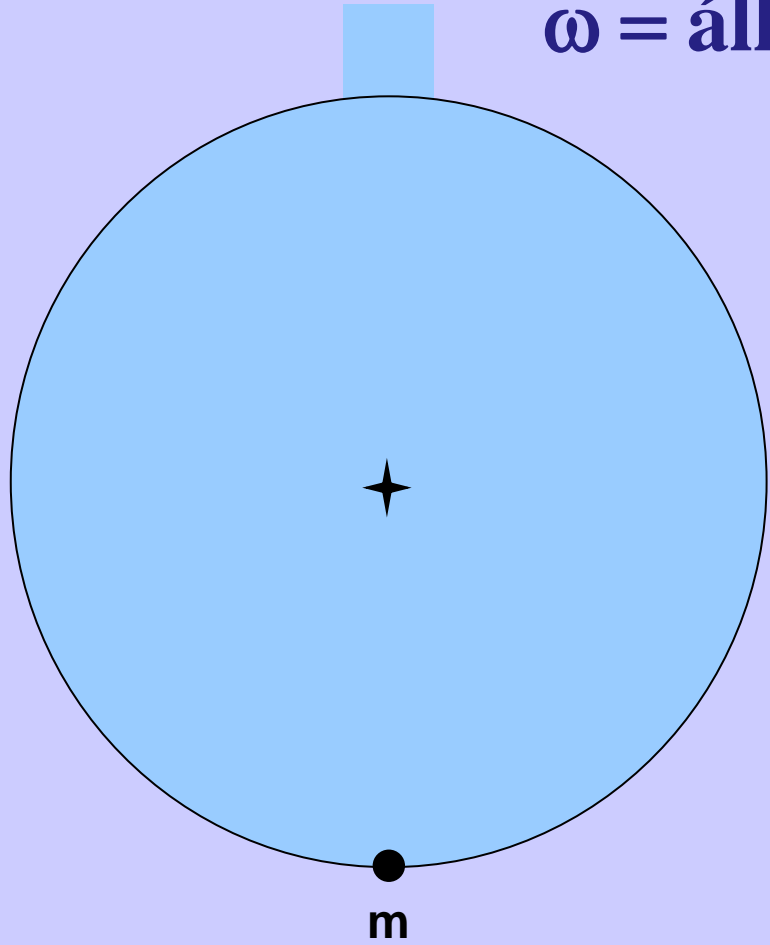


pl. : haladó mozgás :

pl. vonat a sinen, gyalogos a járdán, stb...

körmozgás :   
 → egyenletes   
 → egyenletesen gyorsuló (lassuló)

egyenletes körmozgás :   
  $\omega = \text{áll.}$



út = ívhossz   
 szögelfordulás =  $\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$    
  $\vec{\omega} !$    
  $\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$

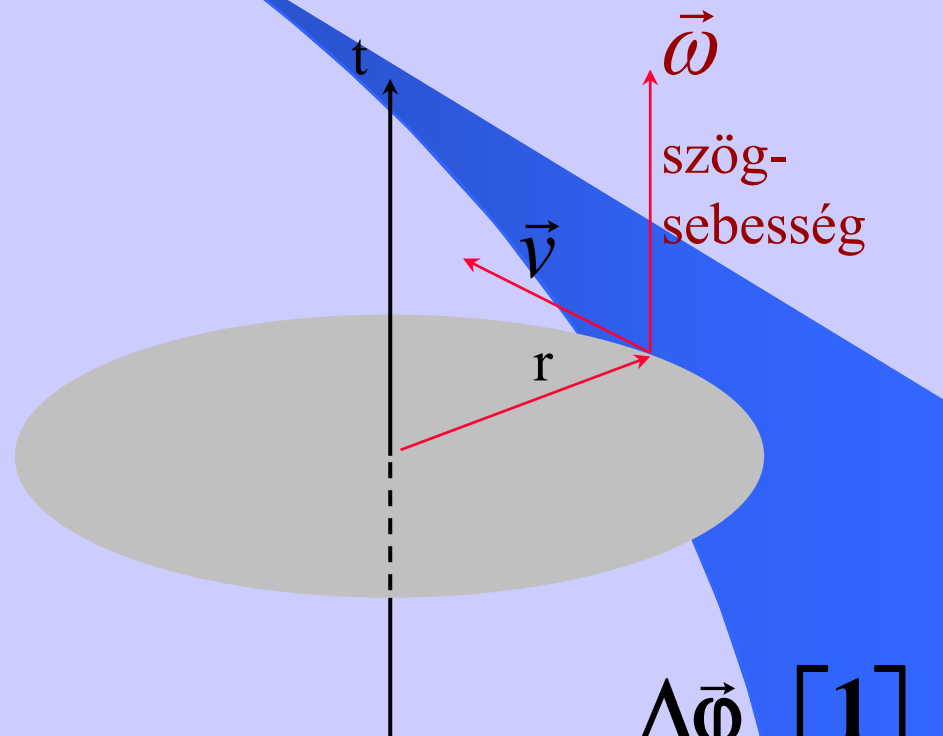
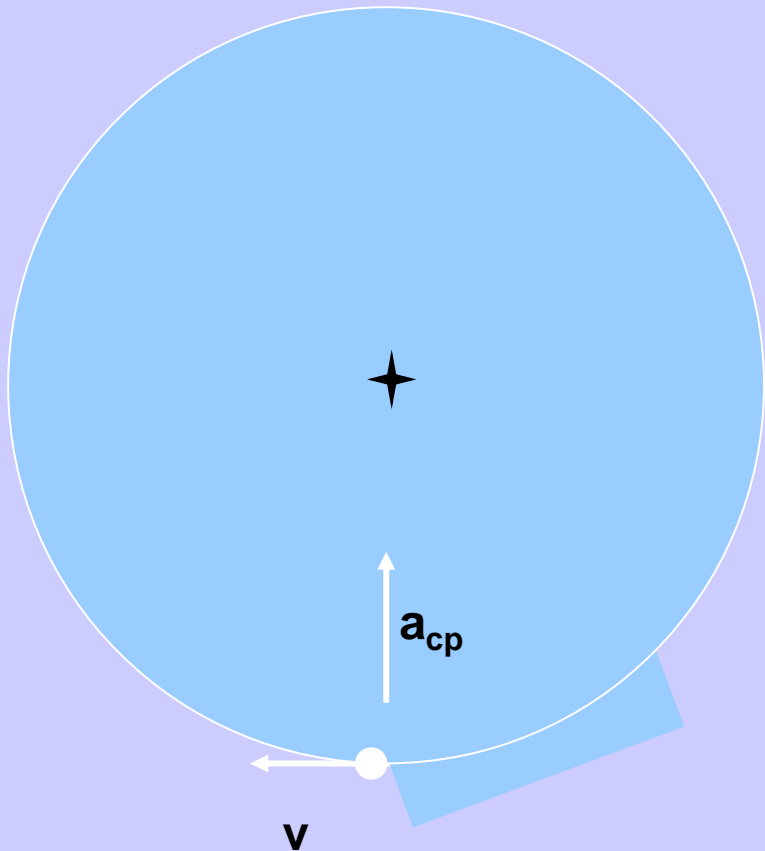
jobbkéz-szabály

periódusidő : T   
 fordulatszám : f → 1/T   
 szögsebesség :  $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$    
  $\phi = \omega \cdot t$    
  $s = r \cdot \phi$    
  $v = r \cdot \omega$

$a_t = 0$ , de  $a_{cp} \neq 0$ :

Ismétlés

$\vec{\Phi}$  !



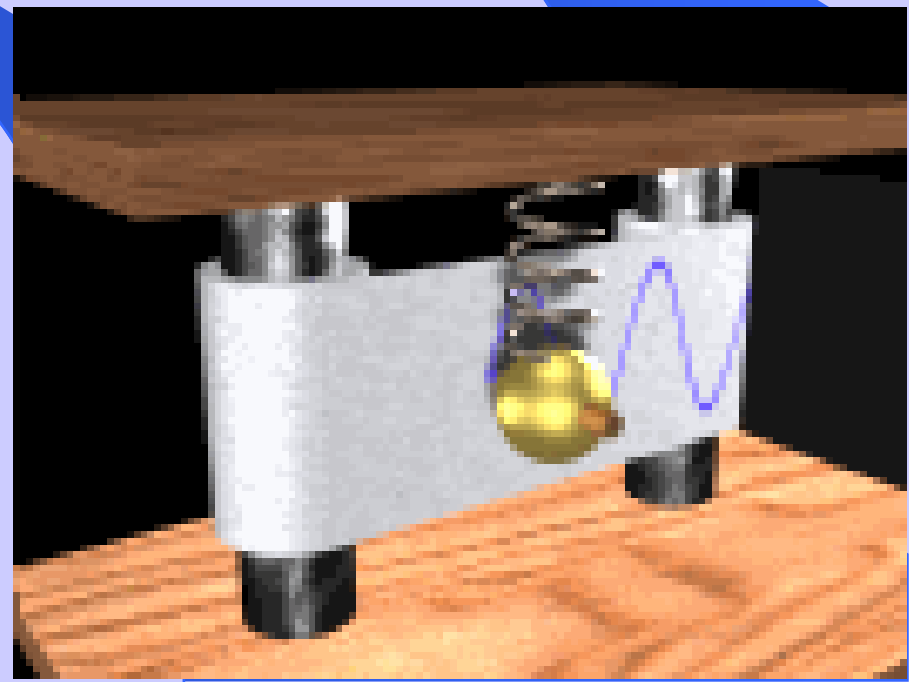
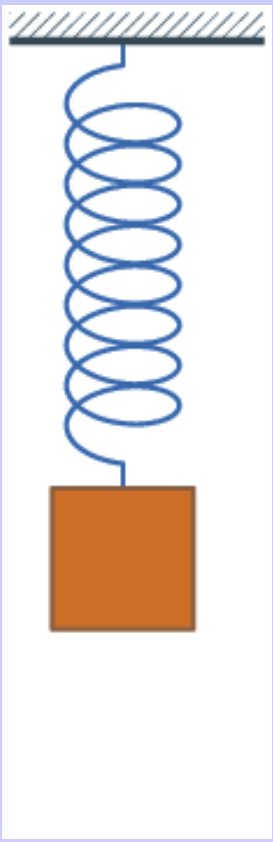
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$
$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$\vec{\omega} = \frac{\Delta \vec{\Phi}}{\Delta t} \left[ \frac{1}{s} \right]$$
$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Phi}}{dt} !$$

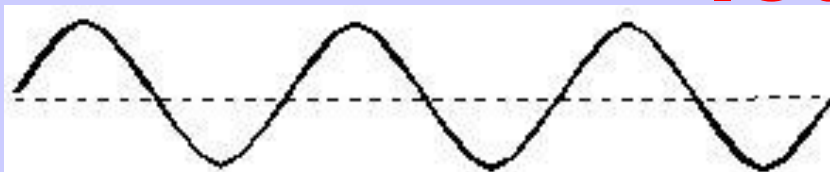
# Harmonikus rezgőmozgás

A kitérés az időnek szinuszos függvénye.

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

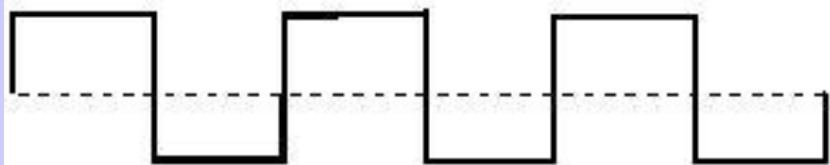


# Nem csak harmonikus rezgések léteznek



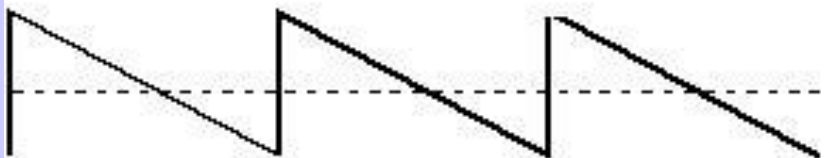
*szinusz*

*sine*



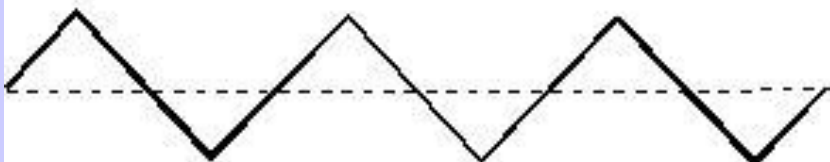
*négyszög*

*square*

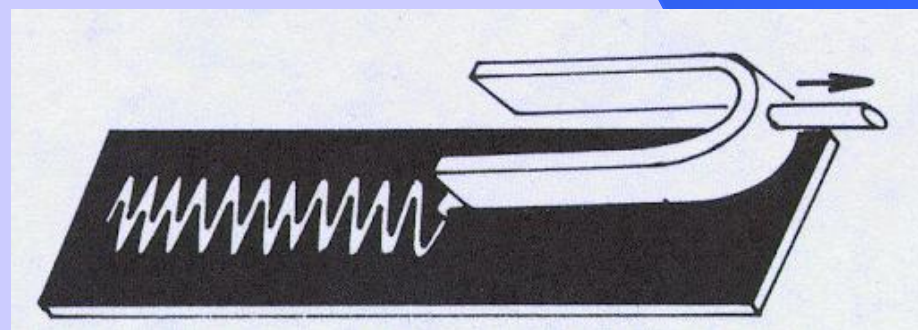


*fűrészfog*

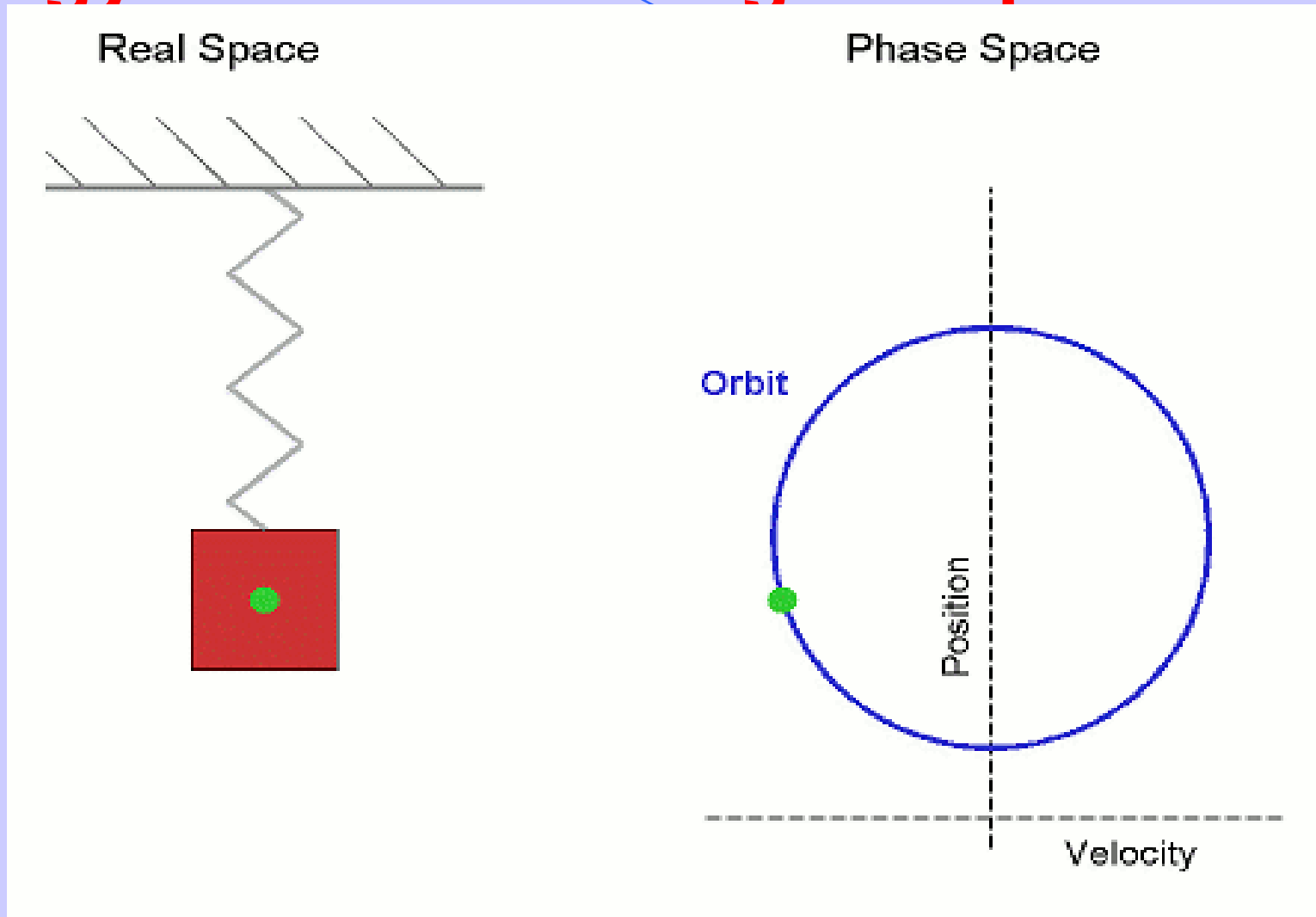
*sawtooth*



A többféle rezgés közül középiskolában a leggyakoribb, harmonikus rezgőmozgással foglalkozunk.



# Harmonikus rezgőmozgás és az *video* egyenletes körmozgás kapcsolata



Az egyenletes körmozgást végző pont merőleges vetülete harmonikus rezgőmozgást végez.

# A harmonikus rezgőmozgás leírható az egyenletes körmozgás vetületeként

Az egyenletes körmozgást végző tömegpont merőleges vetülete ugyanúgy harmonikus rezgőmozgást végez, mint a rugón rezgő test.

A rezgőmozgás leírható körmozgás vetületeként.

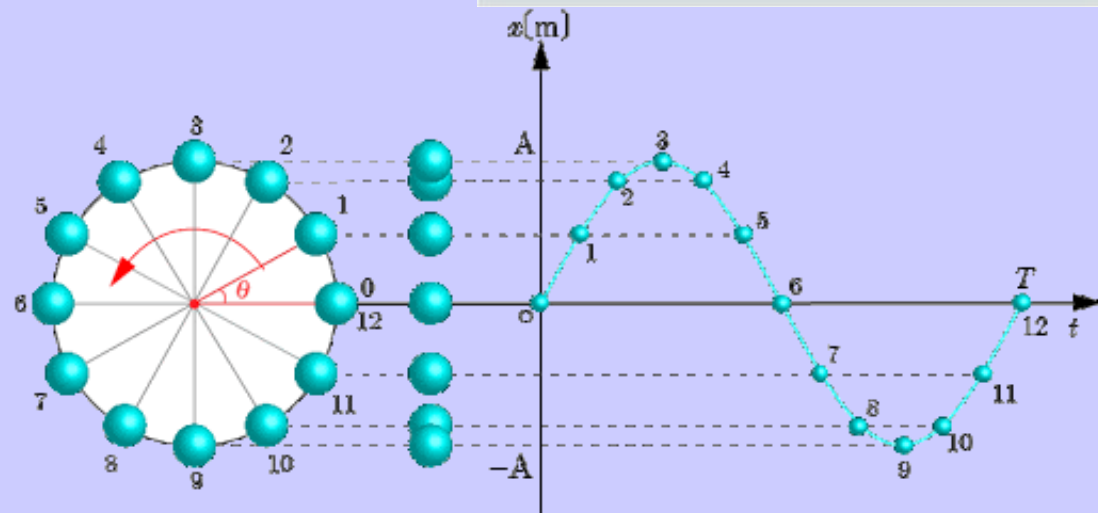
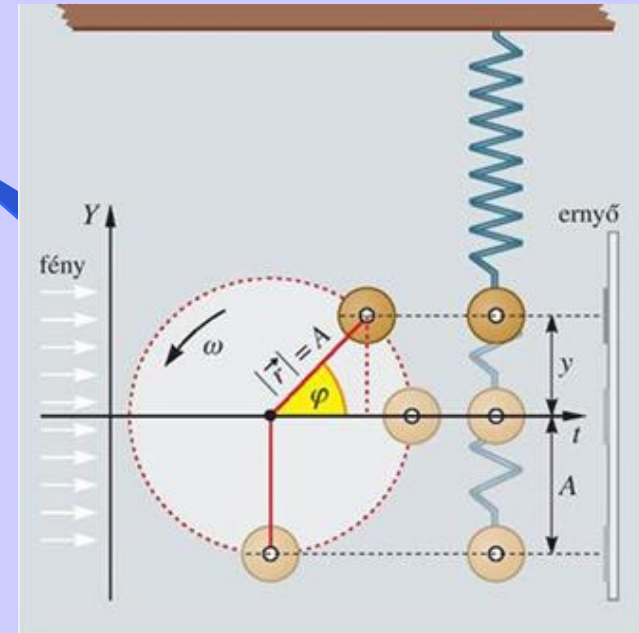
*Az ábra lapján:*

$$y = A \cdot \sin\varphi$$

*Ahol a szögelfordulás függ az időtől:  $\varphi = \omega \cdot t$*

*Ezt behelyettesítve a kitérés időtől való függése:*

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$





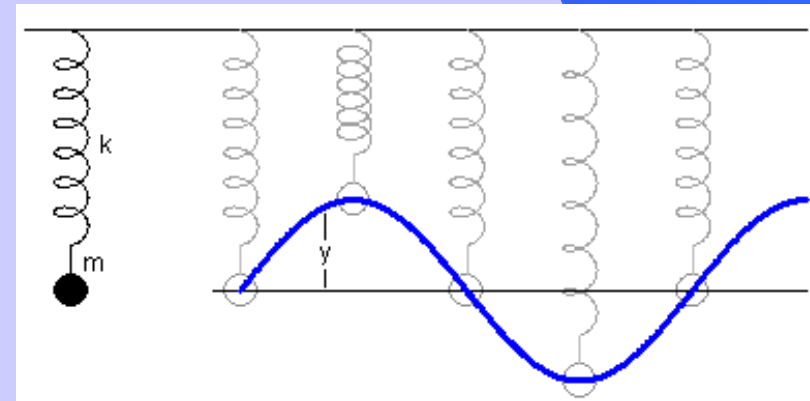
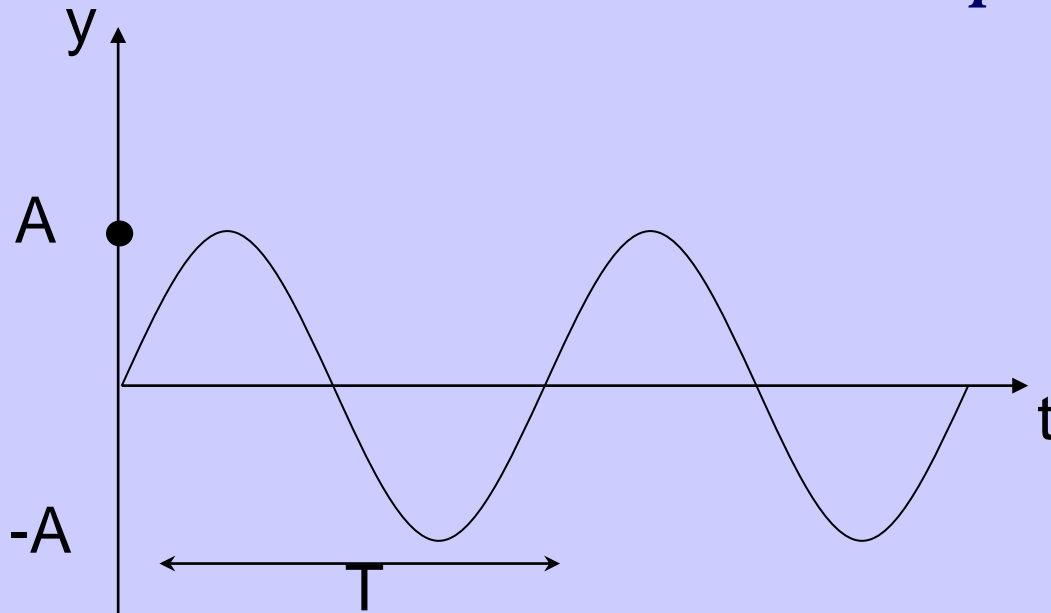
# Harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont kitérését leíró függvény

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

amplitúdó

körfrekvencia:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$T =$  periódusidő  
rezgésidő



# Rezgés frekvenciája, körfrekvencia

$$f \text{ frekvencia} = \frac{\text{rezgések száma}}{\text{eltelt idő}}$$

T idő alatt egy rezgés történik, innen

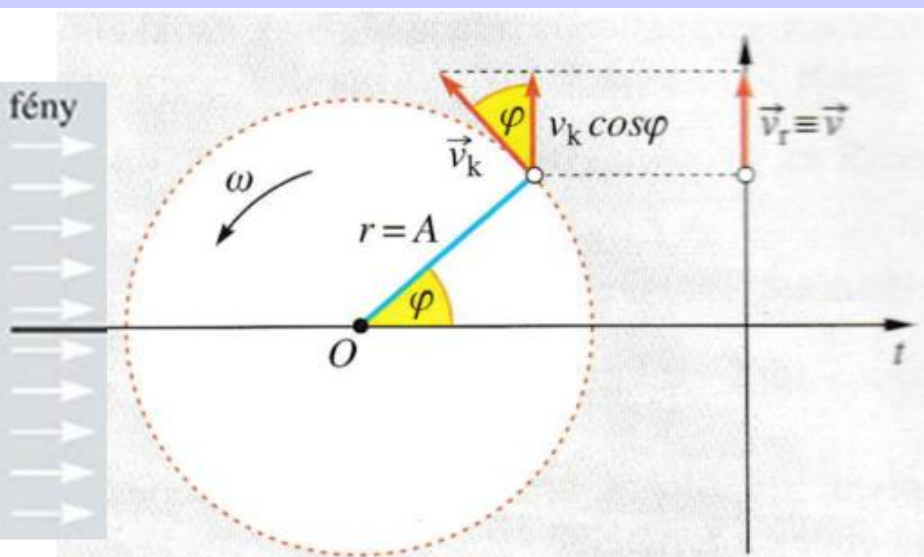
$$f = \frac{1}{T}$$

Körfrekvencia jele:  $\omega$

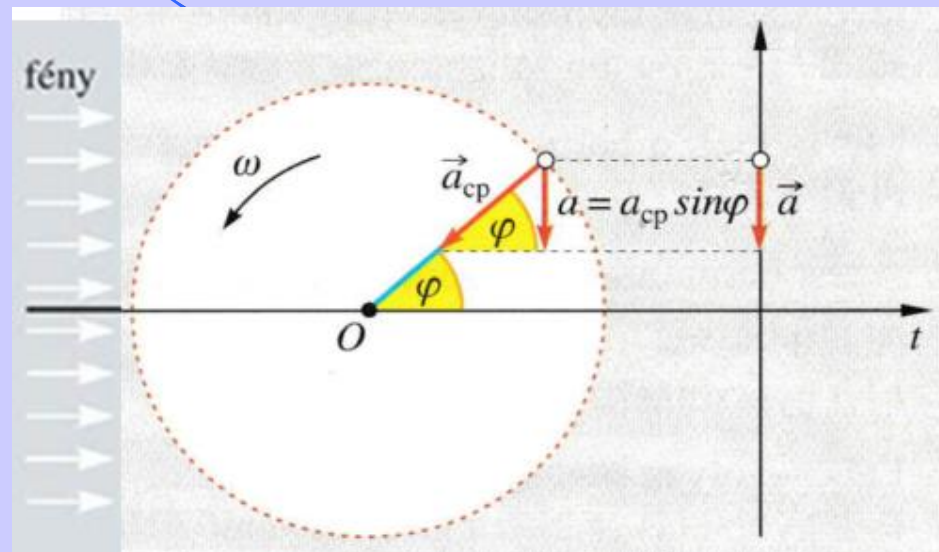
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{vagy } \omega = 2\pi \cdot f$$

# Harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont sebessége, gyorsulása



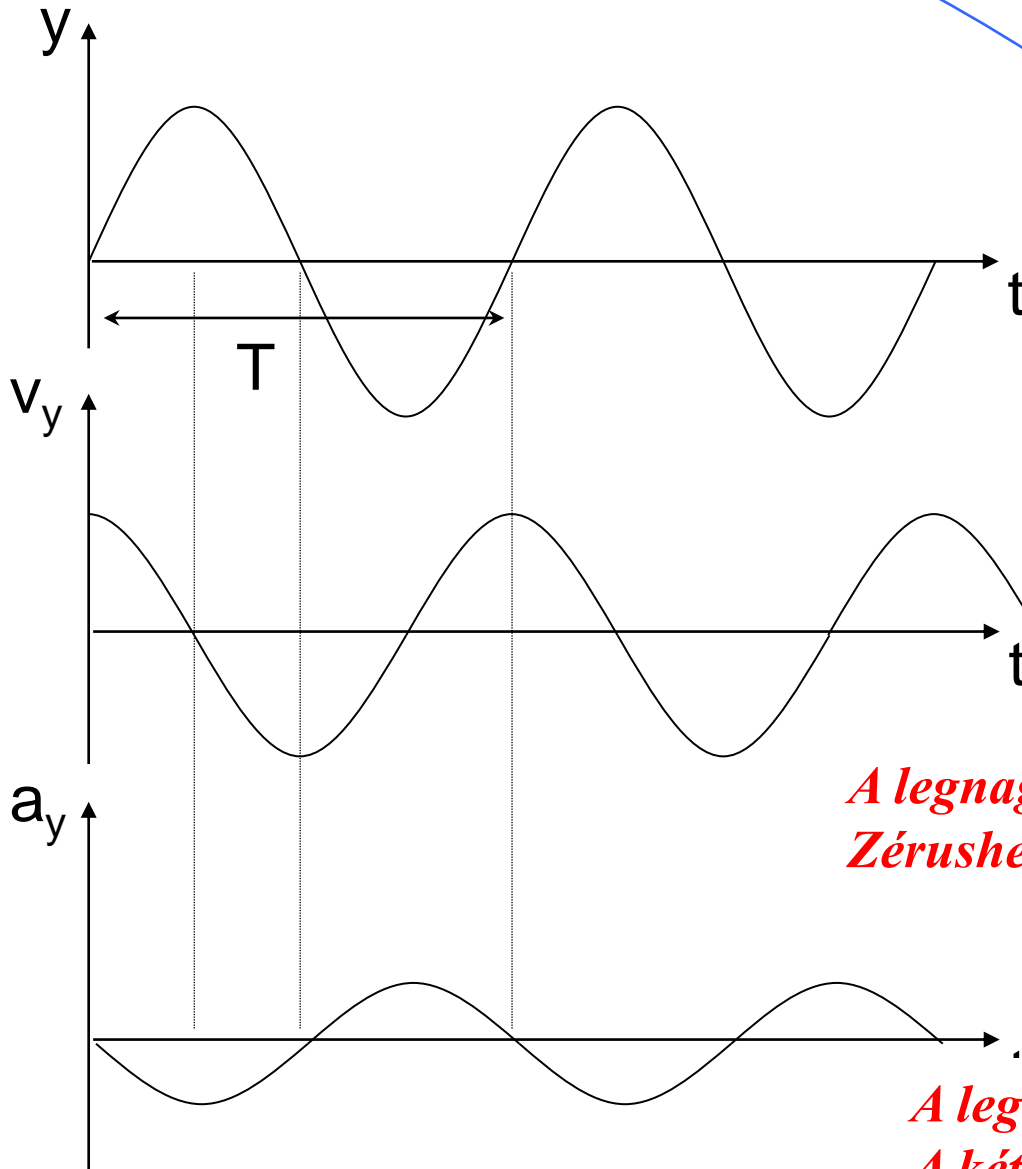
*Az egyenletes körmozgás kerületi sebesség vektorának függőleges összetevője egyenlő a harmonikus rezgőmozgás pillanatnyi sebességével.*



*A körpályán mozgó tömegpont centripetális gyorsulás vektorának rezgésiránnyal párhuzamos összetevője egyenlő a harmonikus rezgőmozgás pillanatnyi gyorsulásával.*

# A kitérés, sebesség és gyorsulás időtől való függése

$$a = -\omega^2 \cdot y$$



$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

*A legnagyobb sebesség:  $v_{max} = A \cdot \omega$   
Zérushelyen való áthaladáskor.*

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

*A legnagyobb gyorsulás:  $a_{max} = A \cdot \omega^2$   
A két szélsőhelyzetben.*

*A legnagyobb sebesség:  $v_{max} = A \cdot \omega$   
Zérushelyen való áthaladáskor.*

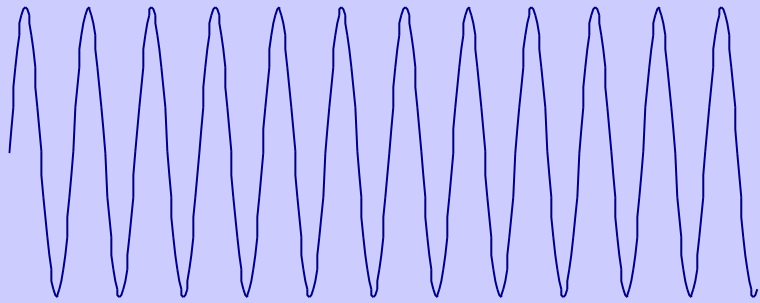
*A legnagyobb gyorsulás:  $a_{max} = A \cdot \omega^2$   
A két szélsőhelyzetben.*

# csillapodó rezgés :

video

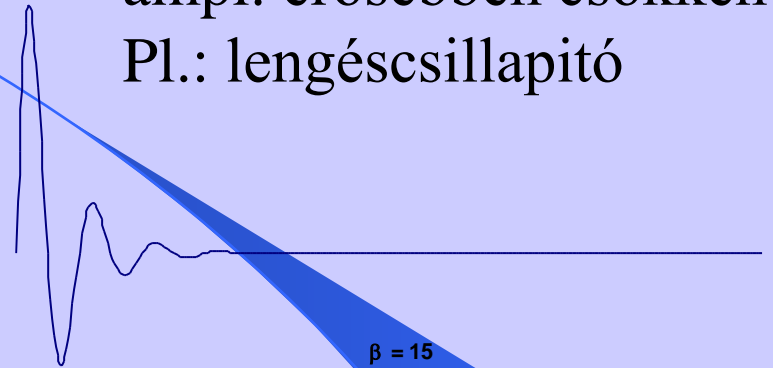
$\beta = 0$

harmonikus



$\beta = 0.4$

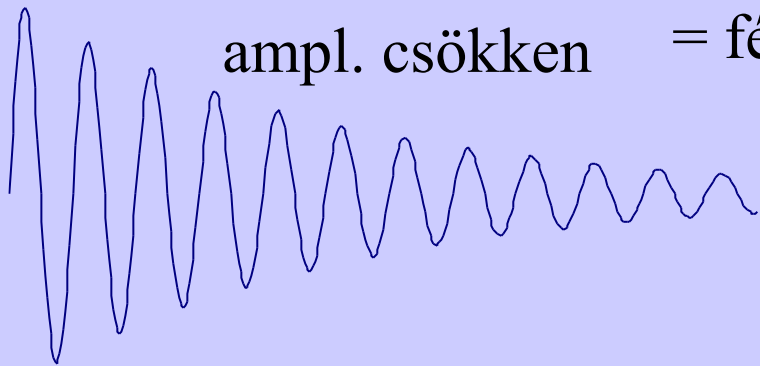
ampl. erőbben csökken  
Pl.: lengéscsillapító



$\beta = 0.1$

csillapítási tényező

ampl. csökken = fékezés

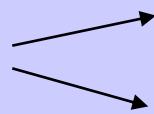


$\beta = 15$

aperiodikus  
határeset



rezgések összeadása



párhuzamos  
merőleges

**kísérlet** : rezgések összeadása →



Fizdemo.exe

# Lengéscsillapítók járművekben



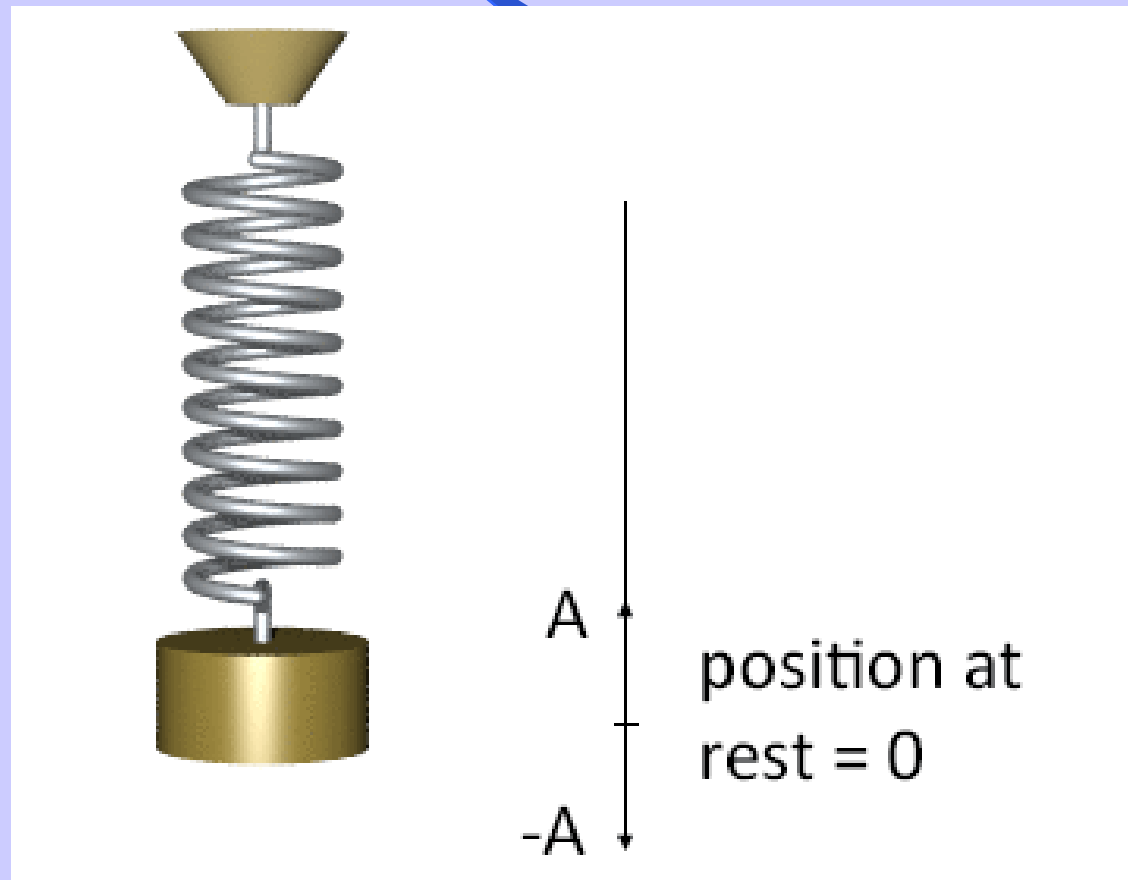
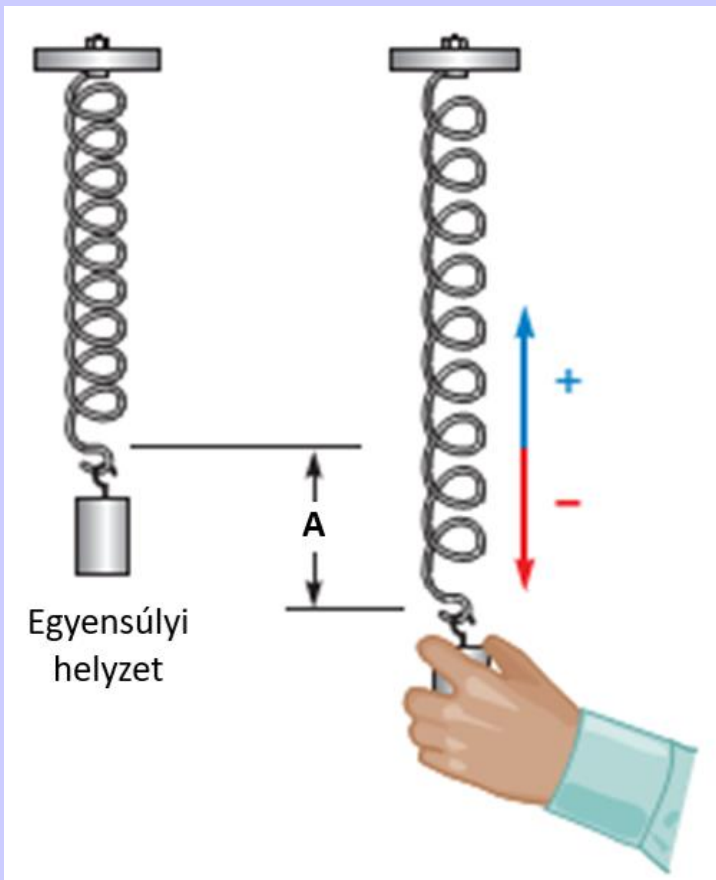
# Saját rezgés, szabad rezgés



- Ha egy rezgésre képes rendszert egy lökészerű erőhatással hozunk mozgásba és magára hagyjuk, akkor a rendszerre jellemző rezgésidővel **szabad rezgést**, más néven **saját rezgést végez**.
- A rezgés periódusideje, saját frekvenciája:
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$        $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$
- **m a rugóra akasztott test tömege**
- **D a rugóra jellemző állandó**

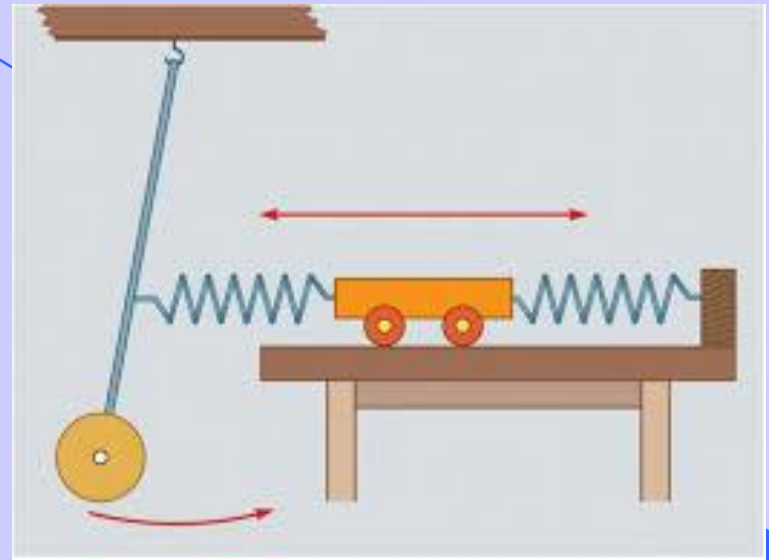


# Rugóra akasztott test rezgésének zérushelye, amplitúdója



# Kényszerrezgés, rezonancia

- Amikor a rezgő rendszer egy külső gerjesztő hatásnak megfelelően kénytelen rezegni, **kényszerrezgést** végez.
- Ekkor nem a saját rezgésének frekvenciájával rezeg.

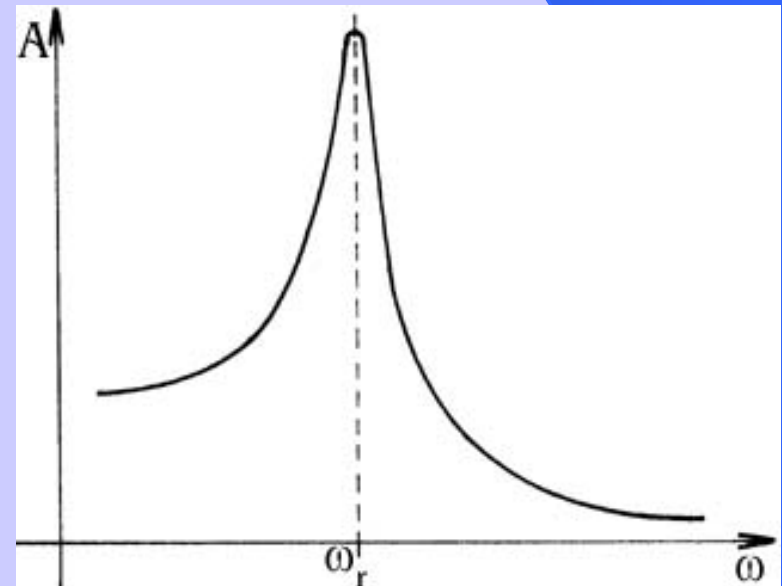


- Ha a kényszerítő rezgés frekvenciája megegyezik a rezgés saját frekvenciájával **rezonancia** lép fel.

# Rezonancia

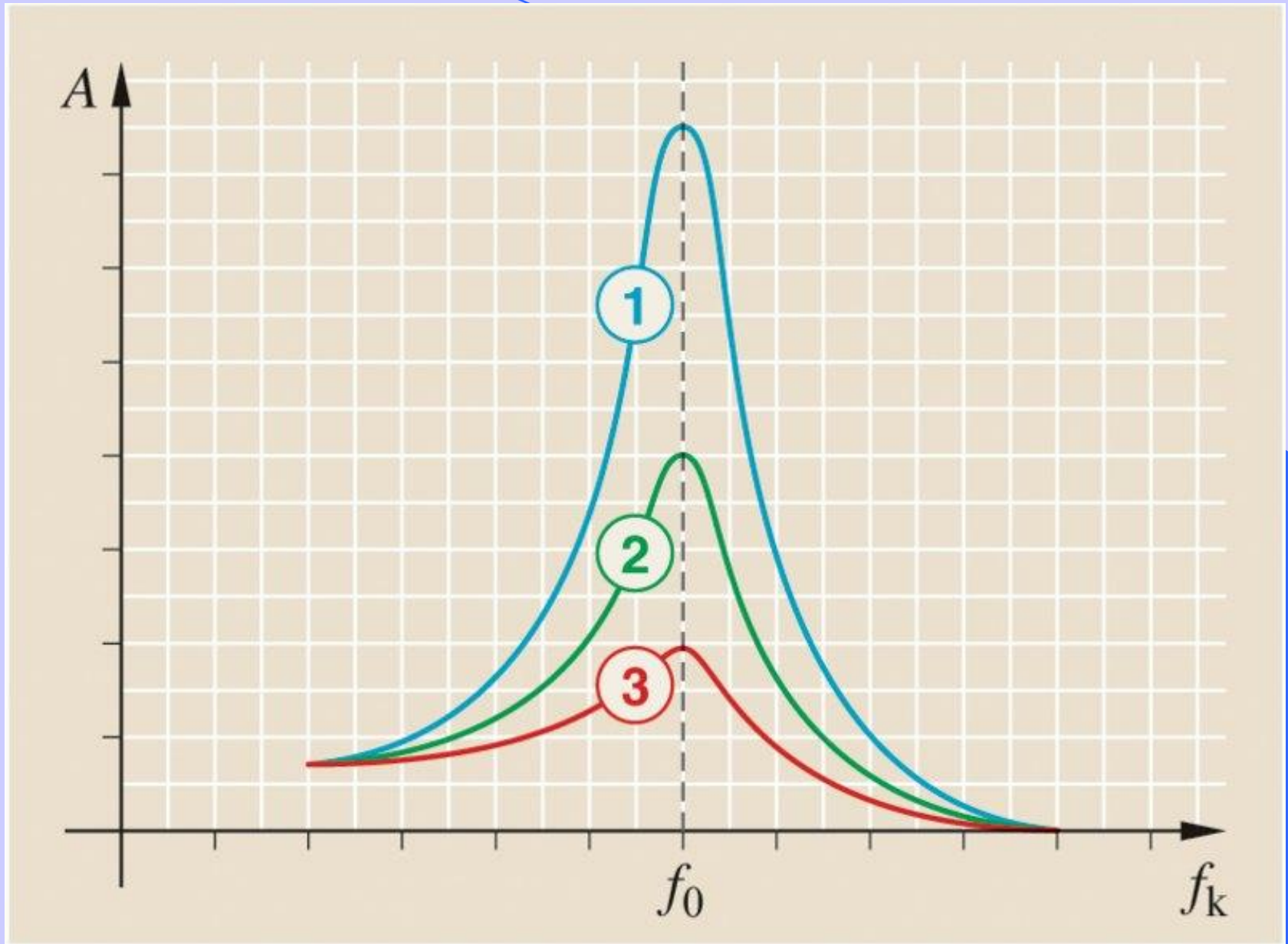
Ha a kényszerrezgés frekvenciája közel azonos a saját szabad rezgésének frekvenciájával (sajátfrekvencia), akkor rezgésének amplitúdója nagyon megnő.

Ez a **rezonancia** jelensége. Ilyenkor az amplitúdó olyan nagymértékben megnőhet, hogy a rezgő rendszer tönkremegy. Ez a jelenség a **rezonancia-katasztrófa**. Pl. Takoma-híd leomlása.



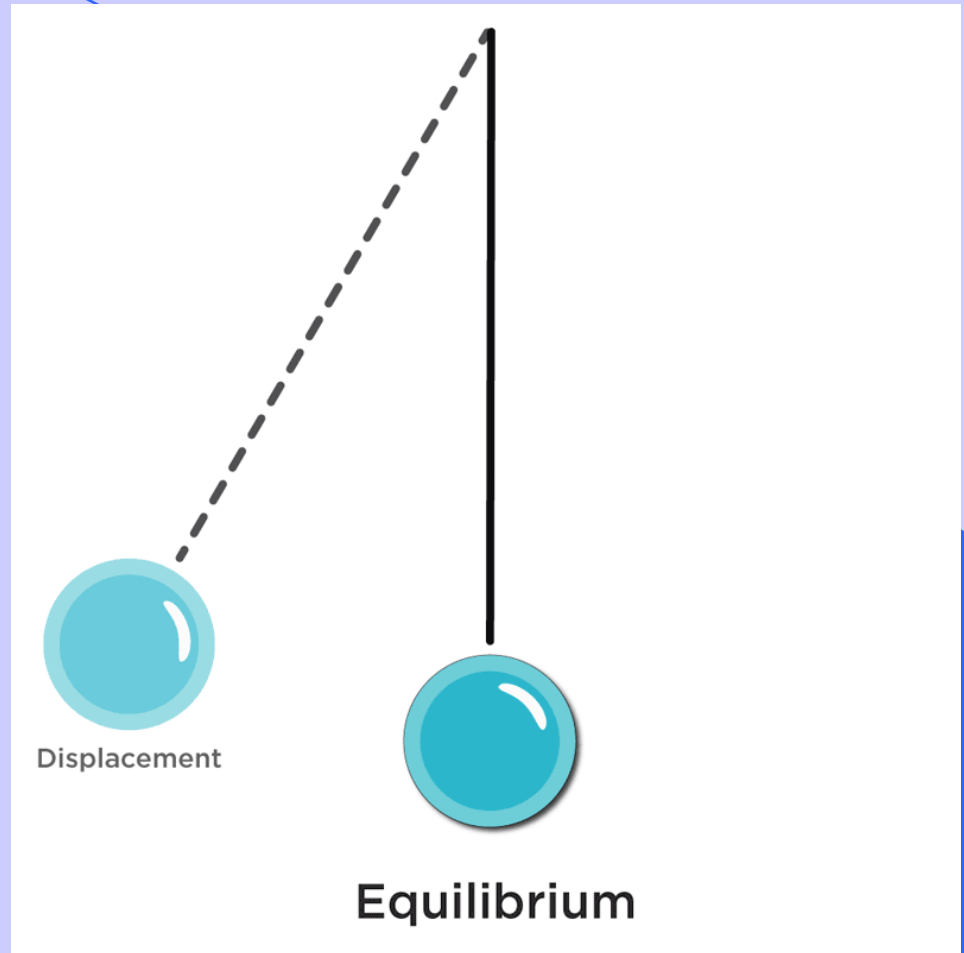
# Rezonancia

*video*

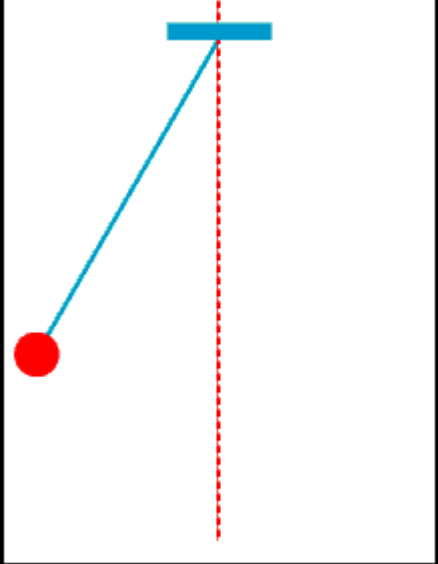


# Fonálinga

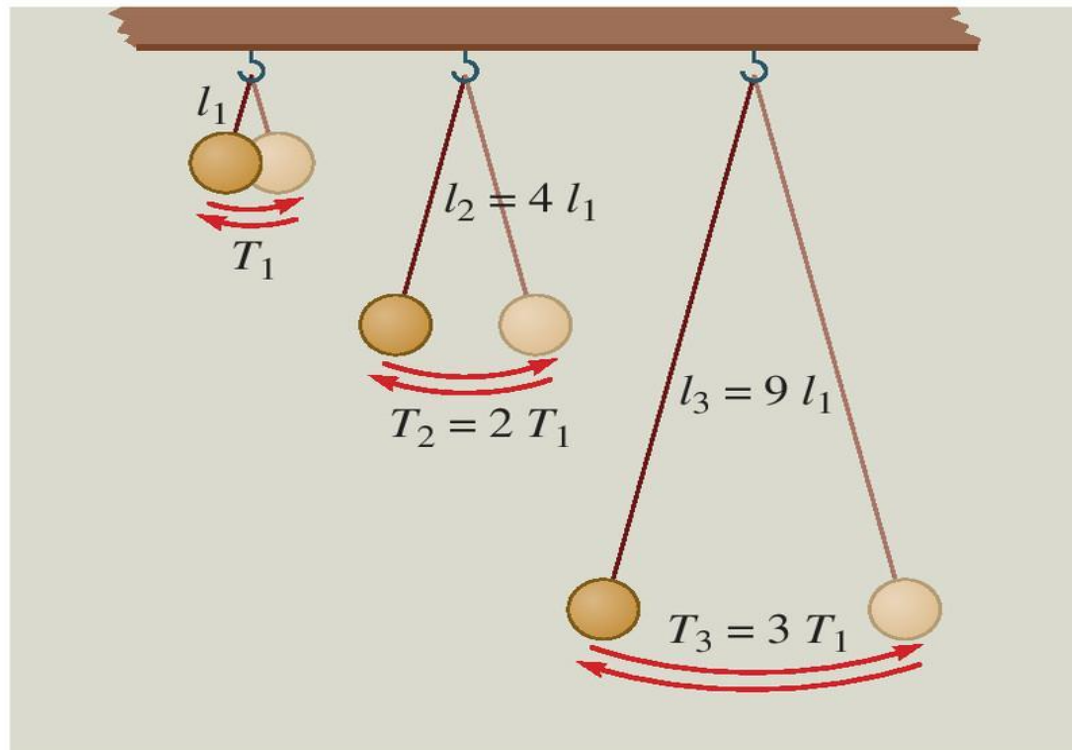
- A fonálinga, ha kilendítjük szintén szabad lengést végez.
- **Lengésideje nem függ a kitérésétől, és a lengő test tömegétől sem. Csak a fonal hosszától ( $l$ ) és a gravitációs erőttől, gravitációs gyorsulástól ( $g$ ) függ.**



- $$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



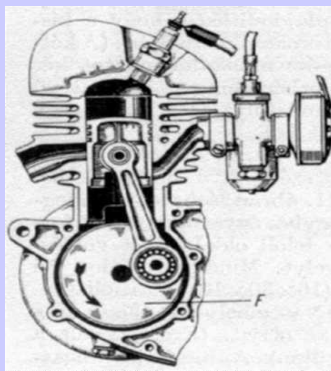
Ha  $l_1 : l_2 : l_3 = 1 : 4 : 9$ , akkor  $T_1 : T_2 : T_3 = 1 : 2 : 3$

### Következmények:

- Ha a fonal hosszabb, a lengésidő is hosszabb lesz.
- Ha a lengő testre ható gravitációs erő, és gyorsulás kisebb (pl. a Holdon), akkor a lengés ideje hosszabb lesz.
- Mivel a lengőmozgás lengésideje a Föld gravitációs terében csak az inga hosszától függ, időmérésre lehet használni. (Ingaóra)

# Rezgőmozgás és lengőmozgás a gyakorlatban

- **Példák rezgőmozgásra, rugó felhasználására:**
  - Járművek kerekeinek ütődéseit rugók csillapítják. (lengéscsillapító)
  - Hangszerek: gitárhúr, dob felülete, cintányér,...stb rezgőmozgást végeznek, a kiadott hang magassága függ a rezgés frekvenciájától.
  - felhúzó rugós órák
- **Példa ingamozgásra:**
  - Ingaórák, hinta
- **Példák rezonanciára:**
  - Szellőkések hatására berezonálhatnak az ablaküvegek.
  - Ha az autóban kilazult egy csavar, bizonyos motorfordulatszámnál (frekvenciánál) berezonál a motor, vagy az autó egy alkatrésze.
  - Hidakon nem szabad katonáknak egyszerre lépve menni.



# Feladat



Egy függőleges helyzetű rugó felső vége rögzített, az alsóra egy 10 dkg tömegű testet erősítünk. A testet rezgésbe hozva, az 10 másodperc alatt 25 teljes rezgést végez.

- Mekkora a test frekvenciája és rezgésideje?

- Mekkora a rugó rugóállandója?

Adatok:  $t = 10 \text{ s}$ ,  $N = 20$ ,  $m = 10 \text{ dkg} = 0,1 \text{ kg}$

$$f = \frac{N}{t} = \frac{25}{10 \text{ s}} = 2,5 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 0,4 \text{ s}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \text{ -ből}$$

$$D = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0,1 \text{ kg} \cdot \left(\frac{2\pi}{0,4}\right)^2 = 24,7 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



# Feladat

Egy varrógép le –fől járkáló tűje harmonikus rezgőmozgást végez. 180 öltést végez percenként. Varrás közben a tű hegye 2 cm-el emelkedik az anyag fölé, illetve 2 cm-el süllyed alá.



- Mekkora sebességgel dőfi át a tű a szövetet?*
- Mekkora a tű gyorsulásának legnagyobb értéke?*
- Mekkora a tű hegyének kitérése, sebessége, gyorsulása az egyensúlyi helyzetben való áthaladás után 0,15 másodperccel?\**

*A csillaggal (\*) jelölt rész nehezebb!*

$$\begin{aligned}n &= 180 \\ \Delta t &= 60 \text{ s} \\ A &= 2 \text{ cm} \\ \underline{t} &= \underline{0,15 \text{ s}} \\ v_{max} &=? \\ a_{max} &=? \\ y(t) &=?* \\ v(t) &=?* \\ a(t) &=?*\end{aligned}$$

# Megoldás (a; b kérdés)

a) Mekkora sebességgel dőfi át a tű a szövetet?

Átdöfésakor a sebesség maximális:

$$v_{max} = A \cdot \omega$$



$$n=180$$

$$\Delta t=60 \text{ s}$$

$$A = 2 \text{ cm}$$

$$t=0,15 \text{ s}$$

$$v_{max}=?$$

$$a_{max}=?$$

Mennyi a frekvencia( $f$ )?

$$f = \frac{180}{1 \text{ min}} = \frac{180}{60 \text{ s}} = 3 \frac{1}{\text{s}}$$

A körfrekvencia:  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 18,84 \frac{1}{\text{s}}$

$$v_{max} = A \cdot \omega = 0,02 \text{ m} \cdot 18,84 \frac{1}{\text{s}} = 0,38 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Mekkora a tű gyorsulásának legnagyobb értéke?

$$a_{max} = A \cdot \omega^2 = 7,09 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

# Megoldás (c kérdés)\*

$$n=180$$

$$\Delta t=60 \text{ s}$$

$$A = 2 \text{ cm}$$

$$\underline{t=0,15 \text{ s}}$$

$$y(t)=?$$

$$v(t)=?$$

$$a(t)=?$$

c) Mekkora a tű hegyének kitérése, sebessége, gyorsulása az egyensúlyi helyzeten való áthaladás után 0,15 másodperccel?\*

Az alábbi egyenletekbe kell behelyettesíteni

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

ahol  $A=0,02 \text{ m}$ ,  $\omega = 18,84 \frac{1}{\text{s}}$ ,  $t=0,15 \text{ s}$

*A szöveget,*

*az  $\omega \cdot t$  értékeket ívmértékben (radiánban) kell megadni!*

$$1 \quad \omega \cdot t = 18,84 \frac{1}{\text{s}} \cdot 0,15 \text{ s} = 2,826$$

$$\sin(\omega \cdot t) = \sin(2,826) = 0,3104$$

$$\cos(\omega \cdot t) = \cos(2,826) = -0,9506$$

Ezeket felhasználva:

$$y(0,15 \text{ s}) = 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad v(0,15 \text{ s}) = -0,358 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad a(0,15 \text{ s}) = -2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$